MAT497 YÜZEYLER TEORİSİ BÜTÜNLEME SINAVI(22.01.2020)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) E^3 de bir yüzey M olsun. M nin parametrik ifadesi

$$\begin{array}{lcr} \Phi : I \times J \subset E^2 & \to & E^3 \\ (u,v) & \to & \Phi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v)) \end{array}$$

olsun. $\{\Phi_u , \Phi_v\}$ sistemi $\chi(M)$ için bir ortogonal baz olsun. $V_1 = \frac{\Phi_u}{\|\Phi_u\|}$, $V_2 = \frac{\Phi_v}{\|\Phi_v\|}$ olmak üzere M yüzeyinin birim normal vektör alanı

$N = V_1 \wedge V_2 = \frac{1}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|} \Phi_u \wedge \Phi_v$ olsun. Bu durumda, $\frac{dN}{du}$ nin en sade şeklini hesaplayınız **(20P.)**.

2.) a) Şekil çizerek Gauss Dönüşümünün tanımını yapınız**(10P)**.

b) E^n de bir hiperyüzey M, $\eta : M \to S^{n-1}$ Gauss dönüşümü ve S de M nin şekil operatörü olmak üzere $\eta_* = S$(yani S, M nin Gauss dönüşümünün Jakobien dönüşümüdür) olduğunu gösteriniz(**10P.**).

3.) E^3 de $M = S^2$ yüzeyinin temel formlarını bulunuz(**(20P.)**.

4.) E^3 de M, denklemi $x_1^2 + x_2^2 = 1$ olan silindir ve M üzerindeki α eğrisi de $a,b,c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha : I \to M,\ \alpha(t) = (\cos(at+b), \sin(at+b), ct+b)$$

ile verilmiş olsun. α eğrisinin silindir üzerinde bir geodezik olup olmadığını araştırınız **(20P.)**.

5.) $Z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - 2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki, bu nokta $(0,1,0)$ noktasına en yakın nokta olsun(Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanılacak) **(20P.)**.

NOT: Sorular eşit puanlı olup, süre 90 dakikadır. Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

Mat 497 Yüzeyler Teorisi 22/01/2020

C-1)

$$N = V_1 \wedge V_2 = \frac{1}{\|\Phi_u\| \, \|\Phi_v\|} \Phi_u \wedge \Phi_v$$ dir. Buradan,

$$N = (\Phi_u \wedge \Phi_v)\left[\langle \Phi_u, \Phi_u \rangle^{-1/2} \cdot \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle^{-1/2}\right]$$ yazılabilir.

$$\frac{dN}{du} = \frac{\Phi_{uu} \wedge \Phi_v + \Phi_u \wedge \Phi_{vu}}{\|\Phi_u\| \, \|\Phi_v\|} - \frac{1}{2} \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_{uu}, \Phi_u \rangle + \langle \Phi_u, \Phi_{uu} \rangle}{\langle \Phi_u, \Phi_u \rangle^{3/2} \cdot \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle^{1/2}}$$
$$- \frac{1}{2} \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_{vu}, \Phi_v \rangle + \langle \Phi_v, \Phi_{vu} \rangle}{\langle \Phi_v, \Phi_v \rangle^{3/2} \cdot \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{du} = \frac{\Phi_{uu} \wedge \Phi_v + \Phi_u \wedge \Phi_{vu}}{\|\Phi_u\| \, \|\Phi_v\|} - \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_u, \Phi_{uu} \rangle}{(\|\Phi_u\|^2)^{3/2} \cdot \|\Phi_v\|}$$
$$- \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_{vu}, \Phi_v \rangle}{\underbrace{(\|\Phi_v\|^2)^{3/2}}_{\|\Phi_v\|^3} \cdot \|\Phi_u\|}$$

elde edilir.

22/01/2020

C-2) a) E^n de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin diferansiyellenebilir birim normal vektör alanı

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

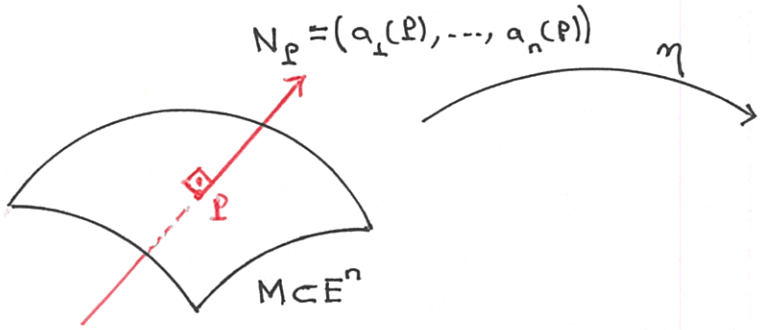
olsun.

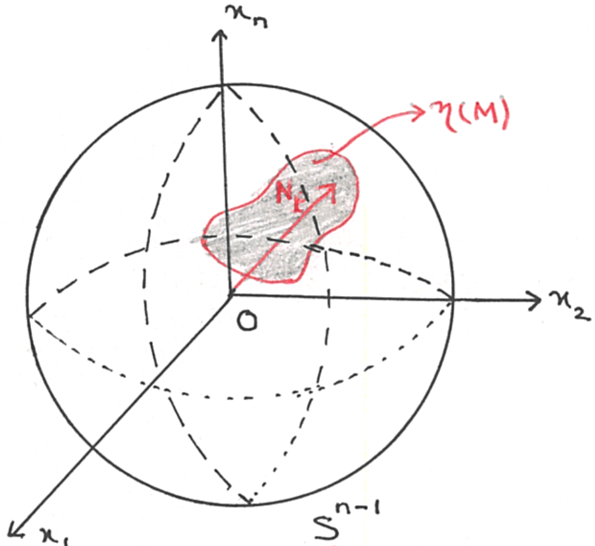
$$S^{n-1} = \{ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \}$$

birim küre olmak üzere

$$\begin{aligned} \eta : M &\longrightarrow S^{n-1} \subset E^n \\ p &\longrightarrow \eta(p) = \overrightarrow{N_p} = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan η dönüşümüne M hiperyüzeyinin Gauss dönüşümü denir. $\|N_p\| = 1$ olduğundan dolayı, açık olarak η dönüşümü M yi E^n deki S^{n-1} birim küresine resmeder. Burada η dönüşümü 1:1 ve örten değildir. Dolayısı ile $\eta(M)$ kümesi kürenin tamamını kapsayacağı gibi tek bir noktadan da oluşabilir.





b) $\forall p \in M$, $X_p \in T_M(p)$ ve $\eta = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ için

$$\eta_*\big|_p (X_p) = \sum_{i=1}^{n} X_p[f_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\eta(p)} = (X_p[f_1], \dots, X_p[f_n])_{\eta(p)} \quad \dots (1)$$

yazılabilir. $\eta\big|_p = (f_1(p), \dots, f_n(p)) = \overrightarrow{N_p}$ olduğundan ve şekil operatörü tanımından

$$S_p(X_p) = D_{X_p} N = (X_p[f_1], \dots, X_p[f_n]) \quad \dots (2)$$

bulunur. (1) ve (2) eşitliklerinden

$$\eta_*\big|_p (X_p) = S_p(X_p)$$

elde edilir. O halde, $\forall X_p \in T_M(p)$, $\forall p \in M$ için doğru olduğundan

$$\eta_* = S$$

elde edilir.

C-3) Önce yüzeyin şekil operatörünü bulalım:

$M = S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=r^2\}$ yüzeyi E^3 de O merkezli r yarıçaplı küredir.

Yüzeyin tanımında kullanılan fonksiyon,

$$f : E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-r^2 = 0$$

olduğundan, $\overrightarrow{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$ yüzeyin normalidir.

$\|\overrightarrow{\nabla f}\| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2r$ olduğundan, yüzeyin birim normali,

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \left(\frac{1}{r}x, \frac{1}{r}y, \frac{1}{r}z\right).$$

$$S(X) = D_X N = \left(X[\tfrac{1}{r}x], X[\tfrac{1}{r}y], X[\tfrac{1}{r}z]\right).$$

$\vec{V}_P[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_P$ olduğunu Dif. Geo. I den biliyoruz.

$X = (x_1, x_2, x_3)$ olsun.

$$X[\tfrac{1}{r}x] = \langle X, \nabla(\tfrac{1}{r}x)\rangle = \langle (x_1,x_2,x_3), (\tfrac{1}{r}, 0, 0)\rangle = \tfrac{1}{r}x_1,$$
$$X[\tfrac{1}{r}y] = \langle X, \nabla(\tfrac{1}{r}y)\rangle = \langle (x_1,x_2,x_3), (0, \tfrac{1}{r}, 0)\rangle = \tfrac{1}{r}x_2,$$
$$X[\tfrac{1}{r}z] = \tfrac{1}{r}X[z] = \tfrac{1}{r}\langle (x_1,x_2,x_3), (0,0,1)\rangle = \tfrac{1}{r}x_3.$$
$$\Rightarrow S(X) = \left(\tfrac{1}{r}x_1, \tfrac{1}{r}x_2, \tfrac{1}{r}x_3\right) = \tfrac{1}{r}(x_1,x_2,x_3) = \tfrac{1}{r}X.$$

S şekil operatörünün matrisi $\mathcal{S}$ olmak üzere,

$$S(X) = \mathcal{S}X = \tfrac{1}{r}X = \tfrac{1}{r}I(X)$$

$\Rightarrow S = \frac{1}{r}I_2$ dir. Dolayısıyla,

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1/r \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece,

1. temel form : $I(X,Y) = \langle X, Y\rangle$,

2. temel form: $II(X,Y) = \langle S(X), Y\rangle = \frac{1}{r}\langle X, Y\rangle$,

3. temel form: $III(X,Y) = \langle S^2(X), Y\rangle = \langle S(X), S(Y)\rangle = \frac{1}{r^2}\langle X, Y\rangle$

bulunur.

22/01/2020

C-4) E^3 de M, denklemi $x_1^2+x_2^2=1$ olan silindir ve M üzerindeki α eğrisi de $a,b,c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow M \\ t &\longrightarrow \alpha(t)=(\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ ct+d) \end{aligned}$$

ile verilmiş olsun. α eğrisinin silindir üzerinde bir geodezik eğri olup-olmadığını araştıralım:

$$\alpha'(t)=(-a\sin(at+b),\ a\cos(at+b),\ c)$$

$$\alpha''(t)=(-a^2\cos(at+b),\ -a^2\sin(at+b),\ 0)$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-1=0 \Rightarrow \nabla f=2(x_1,x_2,0)$$

$$\Rightarrow \vec{N}=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}=\frac{2(x_1,x_2,0)}{2\sqrt{\underbrace{x_1^2+x_2^2}_{=1}}}=(x_1,x_2,0).$$

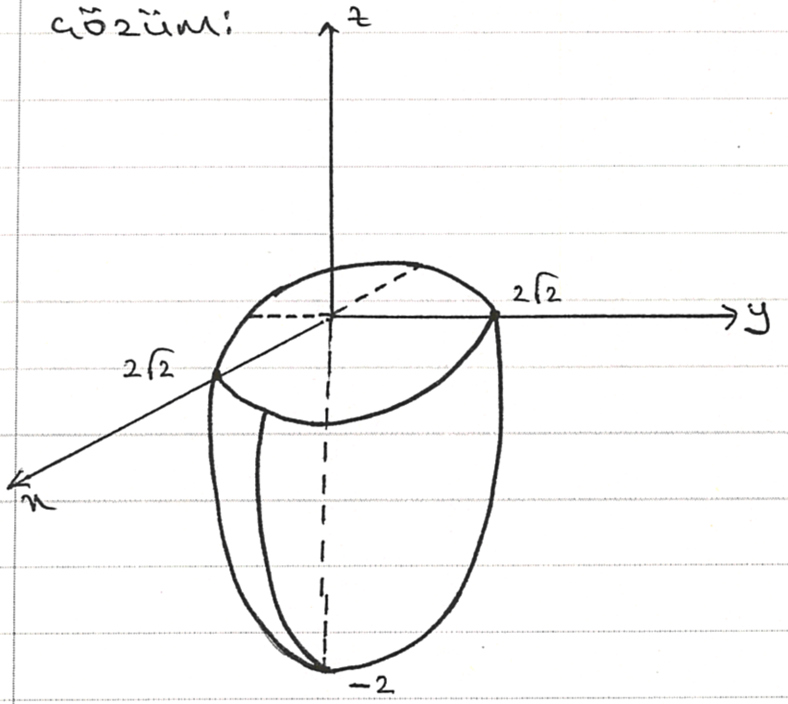
$$N\Big|_{\alpha(t)}=(\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ 0).$$

Buna göre $\alpha''(t)=-a^2 N\Big|_{\alpha(t)}$ olduğundan $\alpha''(t)\perp T_M(\alpha(t))$ dir.

O halde α eğrisi, silindir üzerinde bir geodeziktir.

Soru 5) $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki bu nokta $(0,1,0)$ noktasına en yakın nokta olsun (Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanınız).

Çözüm:



$z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2 \Rightarrow z=\frac{x^2+y^2-8}{4}$

$\Rightarrow x^2+y^2-4z-8=0$ bulunur.

Buradan,

$g(x,y,z)=x^2+y^2-4z-8=0$

ve (x,y,z) ile $(0,1,0)$ noktaları arasındaki uzaklık ifadesinden

$f(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+z^2$

yazabiliriz.

$\nabla g=(2x,2y,-4)$,

$\nabla f=(2x,2(y-1),2z)$

olduğundan Lagrange çarpan teoreminden

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

veya buradan

$$(x,y-1,z)=\lambda(x,y,-2)$$

olup, söz konusu noktada

$$\begin{cases} x=\lambda x \\ y-1=\lambda y \\ z=-2\lambda \\ x^2+y^2-4z=8 \end{cases}$$

sağlanmalıdır. Eğer $x\neq 0$ ise $\lambda=1$ olur. Bu ise $y-1=\lambda y$ den $-1=0$ çelişkisini elde ederiz. O halde $x=0$ olmalıdır.

$x=0$, $y=\frac{1}{1-\lambda}$, $z=-2\lambda$ değerini son denklemde yerine yazarsak

$$0+\frac{1}{(1-\lambda)^2}-4(-2\lambda)=8 \Rightarrow \frac{1+8\lambda(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)^2}=8$$

$$\Longrightarrow 8\lambda^3-24\lambda^2+24\lambda-7=0$$

1/2	8	-24	24	-7
		4	-10	7
	8	-20	14	0

$\Rightarrow (\lambda - \frac{1}{2})(8\lambda^2 - 20\lambda + 14) = 0$

$\Rightarrow (\lambda - \frac{1}{2})(4\lambda^2 - 10\lambda + 7) = 0$

$4\lambda^2 - 10\lambda + 7 = 0$ denkleminin kökle-rini araştıralım:

$\Delta = b^2 - 4ac$ den $\Delta = 100 - 4.4.7 = -12 < 0$ olduğundan kökler sanaldır. Buna göre,

$8\lambda^3 - 24\lambda^2 + 24\lambda - 7 = 0$ denkleminin yalnız bir reel kökü vardır ve o da $\lambda = \frac{1}{2}$ dir.

Buna göre, f için M üzerinde $z = -1$, $x = 0$ ve $x^2 + y^2 - 4z = 8$ den $0 + y^2 - 4.(-1) = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \mp 2$.

$A_1 = (0, -2, -1)$, $A_2 = (0, 2, -1)$ noktaları kritik noktalardır.

$f(A_1) = 10$, $f(A_2) = 2$ olduğundan; $A_2 = (0, 2, -1) \in M$ noktası $(0, 1, 0)$ noktasına M üzerinde en yakın noktadır.

$\lambda = \frac{1}{2}$ için $z = -2\lambda$ dan $z = -2.\frac{1}{2} = -1$